Tabellenkalkulation als Paradigma der mathematischen Formeldarstellung

Erich Neuwirth
Herbert Groß

Zusammenfassung

Wir wollen die Umwandlung einer nicht allzu komplizierten verbal beschriebenen Aufgabe in eine formale Beschreibung sowohl in Form einer Tabelle für ein Tabellenkalkulationsprogramm als auch in „klassischer" mathematischer Formelschreibweise zeigen und anschließend Konsequenzen diskutieren, die sich daraus für die mathematische Lehre ergeben.

1. Tabellenkalkulation als didaktisches Konzept

Zum Verständnis dieses Artikels ist notwendig, daß der Leser Grundkenntnisse im Umgang mit einem Tabellenkalkulationsprogramm hat und insbesondere weiß, wie man in so einem Programm Formeleinträge mit der „Hinzeigemethode" erstellen kann.

Die Aufgabe ist eine einfache Zinzeszinsrechnung:

Jemand zahlt regelmäßig zu Beginn jedes Jahres 1000 S auf ein Sparbuch mit 7 Prozent ein, und zwar 10 Jahre lang. Welcher Betrag ist am Ende des 10. Jahres auf diesem Sparbuch verfügbar?

Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm kann man diese Aufgabe folgendermaßen lösen:

Wir schreiben den am Anfang des Jahres angesparten Betrag, im ersten Jahr also S 1000, in die Tabelle.

	A	B	C	D	E
1	1000.00				
2					
3					
4					

Gleich rechts daneben schreiben wir die Zinsen, die im ersten Jahr anfallen, also 0.07 multipliziert mit diesen S 1000. Diese Formel wird natürlich mit der „Hinzeigemethode" erzeugt, und wir können das bildlich so veranschaulichen:

	A	B	C	D	E
1	1000.00	*0.07			
2					
3					
4					

Sobald eine Tabelle mehrere Spalten mit verschiedenen Inhalten hat, ist es nützlich, die Spalten mit einer Überschrift zu versehen:

	A	B	C	D	E
1	Startbetr.	Zinsen			
2	1000.00	*0.07			
3					
4					

Am Bildschirm wird allerdings nicht diese symbolische Formeldarstellung, sondern sofort der numerische Wert der Formel angezeigt.

Den Endbetrag im ersten Jahr erhalten wir, indem wir den Startbetrag und die Zinsen addieren (und diese Formel natürlich wieder mit Hinzeigen erzeugen):

	A	B	C	D	E
1	Startbetr.	Zinsen	Endbetr.		
2	1000.00	*0.07	+		
3					
4					

Damit ist die Berechnung für das erste Jahr abgeschlossen. Wir wollen als nächstes die Rechnungen für das zweite Jahr durchführen. Da wir später außerdem noch für weitere Jahre Berechnungen durchführen werden, ist es sinnvoll, eine Spalte mit der Jahresbezeichnung einzuführen. Wir brauchen dazu nur eine neue erste Spalte folgendermaßen einfügen:

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Startbetr.	Zinsen	Endbetr.	
2	1	1000.00	*0.07	+	
3					
4					

Für das Jahr 2 könnten wir jetzt die Zahl 2 direkt eingeben, wir wollen aber ausdrücken, daß hier „1 plus die Zahl darüber“ steht, und genau diese Formel läßt sich wieder ganz einfach mit Hinzeigen erzeugen:

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Startbetr.	Zinsen	Endbetr.	
2	1	1000.00	*0.07	+	
3	+ 1				
4					

Der Startbetrag ist der Endbetrag des vorhergehenden Jahres, wir können also einfach eine entsprechende Formel eingeben

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Startbetr.	Zinsen	Endbetr.	
2	1	1000.00	*0.07	+	
3	+ 1	+			
4					

Jetzt stellt sich allerdings heraus, daß sich das zweite Jahr (und auch alle weiteren Jahre) vom ersten dadurch unterscheidet, daß schon vor der regelmäßig jedes Jahr stattfindenden Einzahlung ein Startbetrag vorhanden ist, daß wir also noch eine weitere Spalte für die Einzahlung brauchen.

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Startbetr.	Einzahl.	Zinsen	Endbetr.
2	1	0.00	1000.00	*0.07	+
3	+ 1	+			
4					

Wir müssen natürlich die Zeile für das erste Jahr anpassen. Im ersten Jahr beträgt der Startbetrag S 0 und die Einzahlung S 1000.

Jetzt stimmt aber die Berechnung der Zinsen nicht mehr, verzinst wird ja generell die Summe von Startbetrag und Einzahlung. Wir führen daher noch eine weiter Spalte ein, in der diese Summe errechnet wird.

	A	B	C	D	E	F
1	Jahr	Startbetr.	Einzahl.	Kapital	Zinsen	Endbetr.
2	1	0.00	1000.00	+	*0.07	+
3	+ 1	+				
4						

Die Einzahlung im zweiten Jahr soll einfach gleich der Einzahlung im ersten Jahr sein, daher geben wir an dieser Stelle ebenfalls eine Formel mit dem entsprechenden Verweis ein. Die Berechnung der Zinsen und des Endbetrags geschieht genauso wie im ersten Jahr aus den Zahlenwerten links daneben, daher müssen wir nur diese beiden Formeln nach unten kopieren.

Die zweite Zeile enthält jetzt das vollständige „Rezept“, wie man aus den Daten des Vorjahres und der neuen Einzahlung den Endbetrag für das jeweils laufende Jahr erhält; wir müssen also nur mehr diese Zeile genügend oft nach unten kopieren und damit ist das Problem vollständig gelöst.

Wenn man versucht, dieses Problem ohne Tabellenkalkulation zu lösen, dann stellt sich das Problem, daß die numerisch einfache Formel dafür eine endliche geometrische Reihe ist. Diese Formel wird Schülern erst sehr spät zugänglich, daher sind derartige Aufgaben erst relativ spät behandelbar. Andererseits ist die geometrische Reihe nichts anderes als die Umformung eines eigentlich iterativen Rechenverfahrens. In „Vorcomputerzeiten“ waren iterative Verfahren für Schüler kaum von praktischem Wert. Mit Computerunterstützung kann man aber iterative Lösungsverfahren als praktikable Lösungswege auch im Schuleinsatz verwenden.

Außerdem kommen in der Formulierung des Beispiels als Tabellenkalkulationsproblem algebraische Variable explizit nicht vor.

Eine algebraische Formulierung unseres Problem könnte etwa lauten:

$$\begin{aligned} E &= (A+Z)+(A+Z)*0.07 \\ A_{\text{neu}} &= E_{\text{alt}} \end{aligned}$$

Dabei bedeuten die einzelnen Variablen folgendes:

E	Endbetrag
A	Anfangsbetrag
Z	Zahlung
K	Kapital

Diese Formulierung könnte man noch formaler gestalten:

$$\begin{aligned} E_n &= (A_n+Z)+(A_n+Z)*0.07 \\ A_{n+1} &= E_n \end{aligned}$$

Die formale Umformung dieser Aufgabe ergäbe

$$Z(1 + 1.07 + 1.07^2 + \ldots)$$

In dieser Formulierung würde aber das inhärent iterative (bzw. sogar rekursive) Prinzip der Aufgabe verschleiert. Das soll nicht bedeuten, daß die algebraische Umformung in die endliche geometrische Reihe bedeutungslos geworden ist. Sie ist nur vom *fast einzig gangbaren* Lösungsweg zu *einem der möglichen* Lösungswege geworden. Außerdem ist der skizzierte Lösungsweg mit der Tabellenkalkulation sicher ein für die meisten Schüler leichter durchschaubarer, weil die verwendeten „Zwischenbegriffe" näher am Problem bleiben, während die Umformung in die endliche geometrische Reihe ja nur der leichteren algebraischen Behandlung dient, zunächst einmal aber keine größeren Einsichten in die Problemstruktur direkt vermittelt.

In der Tabellenkalkulationsformulierung kommen auch keine Variablen im Sinne der Algebra explizit vor. Die Variablen sind dort in gewissem Sinn die Zellinhalte. Und wenn man beim Aufbau der Formeln die Hinzeigemethode verwendet, dann bezieht man sich zur Beschreibung der Strukturen ja nicht auf die konkreten Zellinhalte, sondern man meint „jene Zahl, die in dieser Zelle steht, was auch immer ihr Wert sein möge". Das ist aber natürlich genau das mathematische Konzept der Variablen, nur wird dazu nicht die algebraische „Buchstabenschreibweise" verwendet.

Viele Schüler haben Schwierigkeiten beim Erlernen des „Buchstabenrechnens" mit Variablen, weil ihnen nicht ganz klar ist, was der unter dem abstrahierten Variablenbegriff liegende nichtabstrakte Begriff ist. Daß Variablen dazu da sind, formale Beziehungen zwischen mehr oder weniger beliebigen Zahlen zu beschreiben, ist einer der am schwersten zu vermittelnden Inhalte in der Mathematikdidaktik.

Bei geeigneter Aufbereitung könnte die Tabellenkalkulation vielleicht einen Weg zeigen, den Variablenbegriff unter Beibehaltung der Bedeutung und des grundlegenden Konzepts als Abstraktionsvorgang unmittelbar erlebbar zu machen.

2. Praktische Beispiele

Im folgenden sollen nun einige wenige Musterbeispiele aus dem Lehrstoff der 3.und 4.Klasse vorgestellt werden, die vorteilhaft mit Tabellenkalkulationsprogrammen bearbeitet werden können, und in denen der oben angesprochene Variablenbegriff deutlich wird.

Die angeführten Musterbeispiele erheben keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit. Aus vielen weiteren Teilgebieten des Unterstufen-Stoffes lassen sich gute Beispiele für den Variablenbegriff des „Hinzeigens" finden. Außerdem sind alle angeführten Musterbeispiele beliebig ergänz- und ausbaubar, worauf auch im Anschluß an das jeweilige Beispiel kurz eingegangen wird.

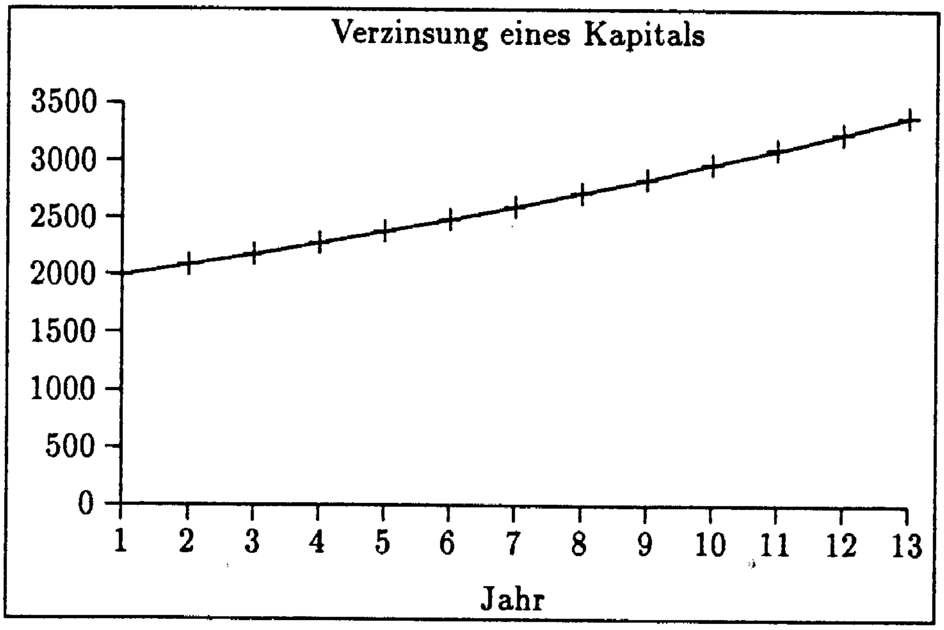
Die jeweils unterhalb der Tabelle angegebene „klassische" Formeldarstellung ist nicht als tatsächliche Eingabe gedacht. Sie ist lediglich „Kurzschrift" für den Aufbau mit der Hinzeigemethode, die vom Leser selbst erprobt werden soll.

2.1. Zinseszinsaufgaben

	A	B	C	D	E	F	G
1	Verzinsung eines Kapitals						
2							
3	Kap.alt	Zinssatz	Zinsen	Kap.neu	Jahr		
4	2000.00	4.50	90.00	2090.00	1		
5	2090.00	4.50	94.05	2184.05	2		
6	2184.05	4.50	98.28	2282.33	3		
7	2282.33	4.50	102.70	2385.04	4		
8	2385.04	4.50	107.33	2492.36	5		
9	2492.36	4.50	112.16	2604.52	6		

FORMELN:
In C4: +A4*B4/100
In D4: +A4+C4
In A5: +D4
In E5: +1+E4

GRAPHISCHE DARSTELLUNG



PROGRAMMTECHNISCHE ANFORDERUNGEN:
Kopieren von Zellen und Bereichen
Graphik

ERWEITERUNGSMÖGLICHKEITEN:
Erreichen eines Zielkapitals; Verdoppeln des Anfangskapitals
Zinssätze jährlich variieren lassen
Ev. jährlich zusätzliche Einzahlungen vornehmen (zusätzliche Spalte einfügen).

2.2. Funktionaler Zusammenhang verschiedener Größen

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Würfel: Kantenlängen verändern							
2							Verhält	
3	Länge	Volumen	Oberfl.	Länge neu	Volumen	Oberfl.	V	O
4	1.00	1.00	6.00	2.00	8.00	24.00	8	4
5	1.50	3.38	13.50	3.00	27.00	54.00	8	4
6	2.00	8.00	24.00	4.00	64.00	96.00	8	4
7	2.50	15.63	37.50	5.00	125.00	150.00	8	4
8	3.00	27.00	54.00	6.00	216.00	216.00	8	4

FORMELN:
In B4: +A4^3
In C4: +6*A4^2
In D4: +A4*2
In E4: +D4^3
In F4: +6*D4^2
In G4: +E4/B4
In H4: +F4/C4
In A5: +A4+0.5

PROGRAMMTECHNISCHE ANFORDERUNGEN:
Kopieren von Zellen und Bereichen

ERWEITERUNGSMÖGLICHKEITEN:
Beliebige Kantenlängen in A4 eingeben
Beliebiges Vielfaches in D4 eingeben
Erkennen von Gesetzmäßigkeiten (Formeln aufstellen)

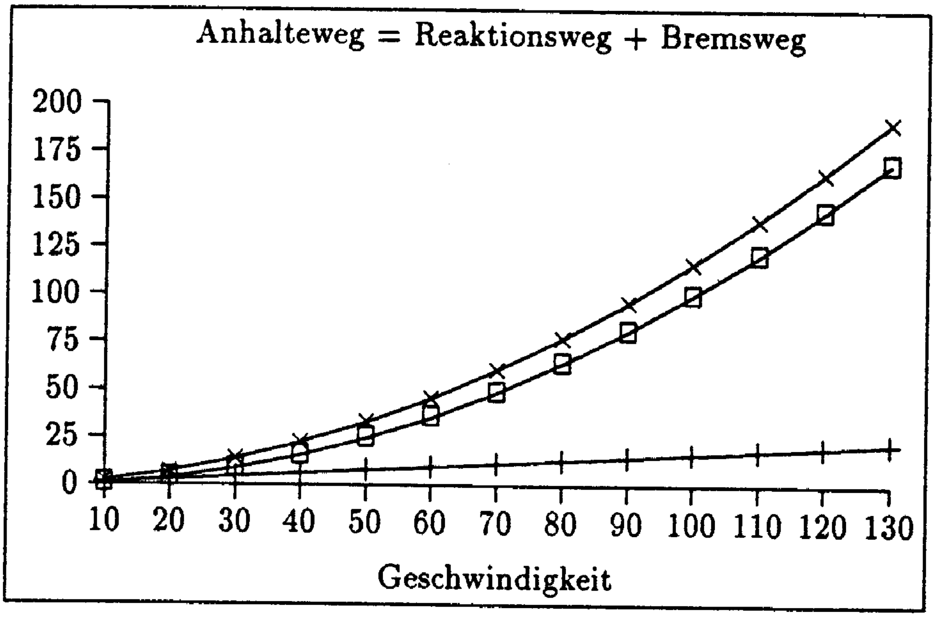
2.3. Abhängigkeit des Anhaltewegs eines Fahrzeugs von der Geschwindigkeit

	A	B	C	D	E	F	G
1	ANHALTEWEG = REAKTIONSWEG + BREMSWEG						
2							
3	Geschwindigkeit		Reakt.-	Reakt.-	Bremsweg	Anhalteweg	
4	(in km/h)		Zeit (s)	weg (m)	(in m)	(in m)	
5							
6	10.00		.60	1.67	1.00	2.67	
7	20.00			3.33	4.00	7.33	
8	30.00			5.00	9.00	14.00	
9	40.00			6.67	16.00	22.67	
7	50.00			8.33	25.00	33.33	

FORMELN:

In D6: `+A6/3.6*$C$6` (Berücksichtigung der Reaktionszeit)
In E6: `+(A6^2)/100` (Erfahrungswert)
In F6: `+D6+E6`
In A7: `+A6+10`

GRAPHISCHE DARSTELLUNG



PROGRAMMTECHNISCHE ANFORDERUNGEN:
Kopieren von Zellen und Bereichen
Ev. Formatieren der Zahlendarstellungen
Graphische Darstellung

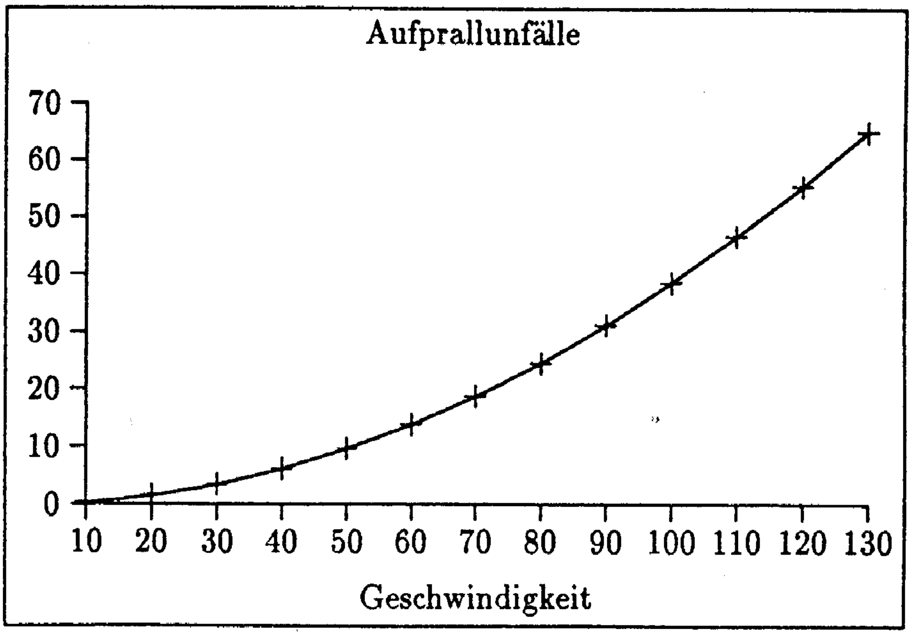
ERWEITERUNGSMÖGLICHKEITEN:
Ev. Reaktionszeit weglassen (Vermeiden der absoluten Adressierung)
Erfahrungswert für Reaktionsweg = $\frac{3v}{10}$ verwenden)
Unterschiedliche Straßenverhältnisse berücksichtigen

2.4. Abhängigkeit des Aufpralls eines Fahrzeugs von der Geschwindigkeit

	A	B	C	D	E	F	G
1	Aufprallunfälle						
2							
3	Geschwindigkeit		Entspricht freiem Fall			Masse	Aufprall
4	in km/h	in m/s	Sekunden	Höhe (m)		d.Autos	E=mv^2/2
5			v= g.t	s= g/2.t^2		(in kg)	(in KJ)
6	10.00	2.78	.28	.39		900.00	3.47
7	20.00	5.56	.56	1.54		900.00	13.89
8	30.00	8.33	.83	3.47		900.00	31.25
9	40.00	11.11	1.11	6.17		900.00	55.56
10	50.00	13.89	1.39	9.65		900.00	86.81

FORMELN:
In B6: +A6/3.6
In C6: +B6/10
In D6: +5*C6^2
In G6: +F6*B6^2/2/1000
In A7: +A6+10
In F7: +F6

GRAPHISCHE DARSTELLUNG



PROGRAMMTECHNISCHE ANFORDERUNGEN:
w.o.

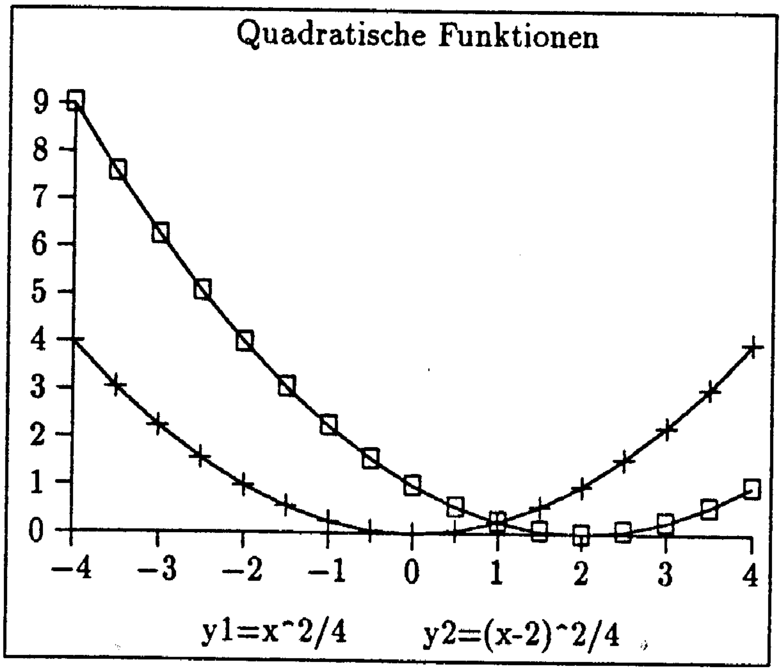
ERWEITERUNGSMÖGLICHKEITEN:
Schweregrad des Aufpralls berechnen (Lehrb.4.Kl, Seite 131)

2.5. Wertetabelle für Funktionen

	A	B	C	D	E	F	G
1	Quadratische Funktionen			y1=x^2/4		y2=(x-2)^2/4	
2							
3	x	y1	y2				
4	-4.00	4.00	9.00				
5	-3.50	3.06	7.56				
6	-3.00	2.25	6.25				
7	-2.50	1.56	5.06				

FORMELN:
In B4: +A4^2/4
In C4: +(A4-2)^2/4
In A5: +A4+0.5

GRAPHISCHE DARSTELLUNG



PROGRAMMTECHNISCHE ANFORDERUNGEN:
Kopieren von Zellen und Bereichen
Graphische Darstellung

ERWEITERUNGSMÖGLICHKEITEN:
Weitere „verwandte" Funktionen in den Spalten D - G berechnen lassen (Graphen-Vergleiche).
Lineare Gleichungssysteme (ev. Bewegungsaufgaben) graphisch lösen.

2.6. Pythagoreische Tripel – Auffinden der dritten Zahl

	A	B	C	D	E	F	G
1	Rechtwinklige Dreiecke						
2							
3	Kathete1		6.00	13.60			
4	Kathete2	3.00		11.40			
5	Hypoten.	5.00	8.00				
6							
7	Kathete1	4.00	6.00	13.60			
8	Kathete2	3.0C	5.29	11.40			
9	Hypoten.	5.00	8.00	17.75			
10							
11	Flächinh.	6.00	15.87	77.52			
12	Höhe	2.40	3.97	8.74			
13	Inkr.Rad.	1.00	1.65	3.56			
14	Umkr.rad.	2.50	4.00	8.87			
15	Hypab.1	3.20	4.50	10.42			
16	Hypab.2	1.80	3.50	7.32			

FORMELN:

In B7: `if(isb(B3),sqrt(B5^2-B4^2),B3)`
In B8: `if(isb(B4),sctt(B5^2-B3^2),B4)`
In B9: `if(isb(B5),sqrt(B3^2+B4^2),B5)`
In B11: `+B7*B8/2`
In B12: `+2*B11/B9`
In B13: `+B7*B8/sum(B7:B9)`
In B14: `+B9/2`
In B15: `+B7^2/B9`
In B16: `+B9-B15`

PROGRAMMTECHNISCHE ANFORDERUNGEN:
Kopieren von Zellen und Bereichen
Anwendung von Spezialfunktionen wie if und isb (isblank)

ERWEITERUNGSMÖGLICHKEITEN:
„PYTHAGORAS"-Anwendungen (Ebene,Raum)